

Examen General de Algebra Moderna

Enero 2014

Lee **cuidadosamente** todos los ejercicios antes de comenzar a resolver el examen.
Para aprobar es necesario resolver **bien** al menos 5 ejercicios **completos**.

Ejercicio 1 Sea G un grupo, y A, B subgrupos normales de G . Demuestra que $G/(A \cap B)$ es isomorfo a un subgrupo del grupo $G/A \times G/B$.

Ejercicio 2

- a) Sea p un primo. Demuestra que el grupo cíclico de orden p^2 tiene exactamente tres subgrupos.
 b) Sea G un grupo cíclico de orden n y sea m un divisor de n . Demuestra que G tiene un único subgrupo de orden m .
 c) Sea G un grupo con exactamente 3 subgrupos. Demuestra que G es cíclico de orden p^2 para algún primo p .

Ejercicio 3

- a) Prueba que no existen grupos simples de orden 255.
 b) Prueba que si $|G| = 28$ y G tiene un 2-subgrupo de Sylow H con $H \triangleleft G$ entonces G es abeliano.

Ejercicio 4 Sea R un anillo conmutativo con unitario, $I \subset R$ ideal.

- a) Prueba que el conjunto

$$\sqrt{I} = \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}, \text{ con } x^n \in I\}$$

es un ideal. Es conocido como el radical de I .

- b) Prueba que el anillo cociente R/I no tiene nilpotentes si y solo si $I = \sqrt{I}$.

Ejercicio 5 Sea R un dominio de factorización única y $P \subset R$ un ideal primo. Prueba que existe un ideal principal Q tal que $Q \subset P$ y Q es primo.

Ejercicio 6 Sea p un primo y $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid \text{mcd}(a, b) = 1 \text{ y } b \text{ no es múltiplo de } p\}$. Notemos que $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un subanillo de \mathbb{Q} . Demuestra que $p\mathbb{Z}_{(p)} = \langle \frac{p}{1} \rangle$ es el único ideal maximal de $\mathbb{Z}_{(p)}$ y que el cociente por este ideal es isomorfo al campo con p elementos.

Ejercicio 7 Sea R un anillo con unitario y M un R -módulo.

- a) Demuestra que existe un epimorfismo de R -módulos $F \rightarrow M$ para algún R -módulo libre F .
 b) Demuestra que existe una sucesión exacta de R -módulos, posiblemente infinita

$$\cdots \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

donde los F_i son R -módulos libres.

Ejercicio 8 Decimos que un R -módulo M es cíclico si existe $x \in M$ tal que $M = \langle x \rangle$.

- Muestra que si I es un ideal de R entonces R/I es un R -módulo cíclico.
- Prueba que dos R -módulos cíclicos M_1 y M_2 son isomorfos si y solo si $\text{ann}(M_1) = \text{ann}(M_2)$, donde $\text{ann}(M) = \{r \in R \mid rm = 0, \forall m \in M\}$

Ejercicio 9 Demuestra que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, donde q es el máximo común divisor de m y n . Demuestra que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.