

Examen General de Álgebra (Agosto 2025)

Nombre: _____

Instrucciones: Lea cuidadosamente el examen antes de comenzar a resolverlo. Dispone de 180 minutos. Debe justificar completamente y rigurosamente todas sus respuestas para recibir crédito completo.

1. Sea p un número primo. Pruebe que todo grupo de orden p^2 es abeliano.
2. Clasifique los grupos de orden 35 salvo isomorfismo.
3. Sea A un anillo conmutativo con identidad. Sean $\mathfrak{a}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \subset A$ ideales tales que $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$ son primos y $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \cup \mathfrak{q}$. Muestre que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ o $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$.
4. Sea A un anillo conmutativo con identidad. Muestre que si A es noetheriano entonces todo homomorfismo sobreyectivo $\phi: A \rightarrow A$ es necesariamente un isomorfismo.
5. Sea $k \subset K$ una extensión de campos y sea R un subanillo $k \subset R \subset K$.
 - (a) Muestre que si $k \subset K$ es algebraica entonces R es un campo.
 - (b) Si $k \subset K$ no es algebraica, ¿se cumple necesariamente que R es un campo?
6. Sea $k \subset K$ una extensión de Galois finita. Suponga que p es un número primo tal que $[K : k] = p^e n$ y p no divide a n . Muestre que para todo $i \in \{0, \dots, e-1\}$ existe un campo intermedio $k \subset F_i \subset K$ tal que $[F_i : k] = p^i n$.